विद्युत-परिपथ तथा किर्कहॉफ के नियम

(०) विद्युत धारा (Electric Current)

एक स्थान से दूसरे स्थान तक **आवेश** का प्रवाह है और जब यह प्रवाह किसी **सुचालक बंद पथ** में होता है तब उस पथ को **विद्युत परिपथ** कहा जाता है।

- **परिभाषा (विद्युत-धारा):**

"किसी चालक या तार के अनुप्रस्थ काट से नेट आवेश के प्रवाह की दर अर्थात प्रति सेकंड प्रवाहित नेट आवेश के परिमाण से **विद्युत-धारा** की माप होती है।"

$$I = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

$$1\ \text{Amphere} = \frac{1\ \text{Calomb}}{1\ \text{second}} \Rightarrow 1A = 1Cs^{-1}$$

- **धारा प्रवाह के दौरान नेट आवेश:**

$$Q = \int_0^Q dQ = \int_0^t I\,dt$$

$$\Rightarrow Q = I \cdot t$$

$$\Rightarrow I = \frac{Q}{t}$$

$$\Rightarrow Q = \int_0^t I(t)\,dt$$

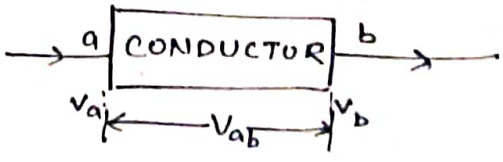
(०) विभवांतर (Potential Difference)

किसी विद्युत-क्षेत्र में किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच विभवांतर की माप कार्य के उस परिमाण से होती है जो प्रति एकांक परिक्षण (धन) आवेश को एक बिंदु से दुसरे बिंदु तक ले जाने में संपादित होता है।

$$\boxed{V_{ab} = V_a - V_b = \frac{W_{ab}}{q}}$$

$$V = \frac{W}{q}$$

$$\Rightarrow W = qV \quad \Rightarrow 1(V) = 1\,JC^{-1}$$



• ओम का नियम (Ohm's Law):

यदि किसी चालक की भौतिक अवस्थाएँ (ताप आदि) न बदलें तो उससे प्रवाहित विद्युत-धारा की प्रबलता उस चालक के सिरों पर लगाए गए विभवांतर के समानुपाती होती है।

$$V \propto I$$
$$V = IR$$

• प्रतिरोध (Resistance):

इलेक्ट्रॉन के प्रवाह में किसी पदार्थ के अणुओं द्वारा जो रुकावट उत्पन्न हो जाती है उसे उस पदार्थ के टुकड़े, अर्थात **प्रतिरोधक का प्रतिरोध** कहा जाता है।

चालक के उस गुण को जो विद्युत-धारा की प्रबलता को निर्धारित करता है, चालक का **विद्युत प्रतिरोध** या केवल **प्रतिरोध** कहा जाता है।

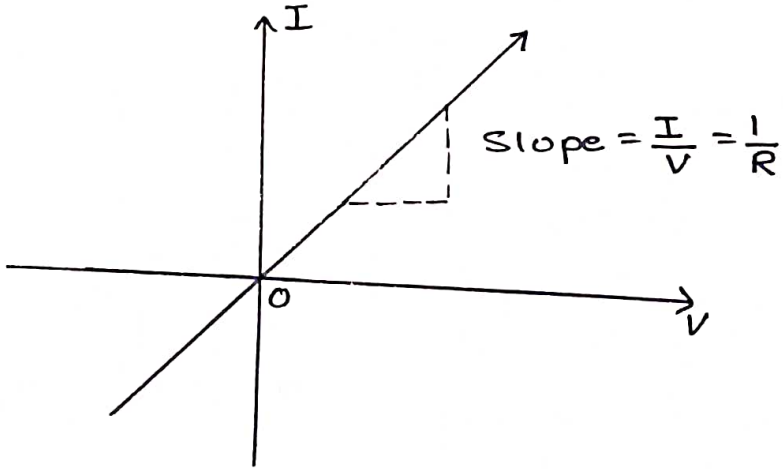
$$\boxed{R = \frac{V}{I}}$$

$$\Rightarrow \quad 1\,\Omega = 1\,VA^{-1}$$

• ओम के नियम की सीमाबद्धता : धारा (I) तथा विभवांतर (V) के बीच रेखीय एवं अरेखीय विचरण

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow R = \frac{V}{I}$$

$$\text{Slope} = \frac{\Delta I}{\Delta V}$$



• प्रतिरोधकता (Resistivity):

किसी प्रतिरोधक का प्रतिरोध (R) उसकी लंबाई (ℓ) के समानुपाती तथा अनुप्रस्थ काट (A) के व्युत्क्रमानुपाती होता है, अर्थात

$R \propto \ell$ जब A नियत हो

$R \propto \frac{1}{A}$ जब ℓ नियत हो

$$R \propto \frac{\ell}{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \rho \frac{\ell}{A}}$$

जहाँ ρ उस प्रतिरोधक के पदार्थ का नियतांक है जिसे उसकी **प्रतिरोधकता** कहा जाता है।

$$\rho = \frac{RA}{l}$$

प्रतिरोधकता का SI मात्रक $= \frac{\Omega m^2}{m} = \Omega m$

- **प्रतिरोधकता का ताप पर निर्भरता (Dependence of Resistivity on Temperature):**

$$\boxed{\rho_\theta = \rho_0 (1 + \alpha\theta)}$$

जहाँ ρ_θ एवं ρ_0 क्रमशः $\theta°C$ तथा $0°C$ पर प्रतिरोधकता है तथा α नियतांक है जिसे पदार्थ का **प्रतिरोधकता ताप गुणांक** कहते है।

- **चालक, विद्युतरोधी, अर्द्धचालक और अतिचालक (Conductors, Insulators, Semiconductors and Superconductors):**

- **चालक:**
  ऐसे पदार्थ जिनकी प्रतिरोधकता बहुत कम होती है, **चालक** कहे जाते है।

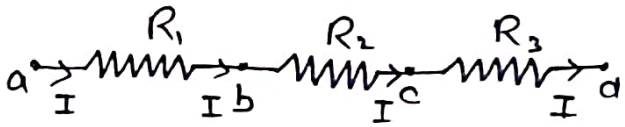
- **विद्युतरोधी:**
  ऐसे पदार्थ जिसकी प्रतिरोधकता बहुत अधिक होती है, **विद्युतरोधी** कहे जाते है।

- **अर्द्धचालक:**
  ऐसे पदार्थ जिसकी प्रतिरोधकता चालकों और विद्युतरोधी पदार्थों की प्रतिरोधकताओं के बीच होती है, **अर्द्धचालक** कहे जाते हैं।

- **अतिचालक:**
  ऐसे प्रति पदार्थ जिनकी प्रतिरोधकता ताप घटाने पर धातु की भाँति पहले नियमित रूप से घटती है और ताप, जिसे क्रांतिक ताप कहते हैं पर प्रावस्था संक्रमण होने के कारण उसकी प्रतिरोधकता एकाएक घटकर शून्य हो जाती है। इस घटना को **अतिचालकता** कहते हैं और ऐसे पदार्थ **अतिचालक** कहे जाते है।

• प्रतिरोधकों के श्रेणीक्रम एवं समांतरक्रम में संयोजन (Series and Parallel groupings of Resistors):

• श्रेणीक्रम में संयोजन :



R_1 के सिरों के बीच विभवांतर

$V_a - V_b = I R_1$

$V_b - V_c = I R_2$

$V_c - V_d = I R_3$

$$V_a - V_d = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

$$V_a - V_d = I R_s$$

$$I R_s = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

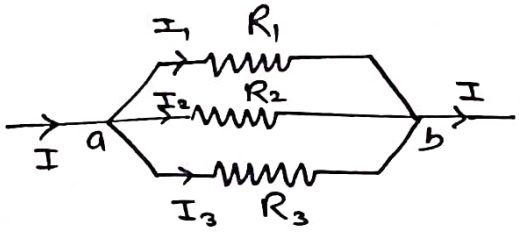
$$R_s = R_1 + R_2 + R_3$$

श्रेणीक्रम में संयोजन के लिए तुल्य प्रतिरोध

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots$$

$$\boxed{R_s = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

• समांतरक्रम में संयोजन :



$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = (V_a - V_b)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$I = \frac{(V_a - V_b)}{R_p}$$

$$\frac{(V_a - V_b)}{R_p} = (V_a - V_b)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

समांतरक्रम में संयोजन के लिए तुल्य प्रतिरोध

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots$$

$$\boxed{\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

• धात्विक चालक में विद्युत आवेश का संचरण। संवहन वेग (Flow of Electric Charge in a Metallic Conductor: Drift Velocity):

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

$$\vec{F} = m_e \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m_e}$$

• संवहन वेग:

इलेक्ट्रान विद्युत - क्षेत्र $\vec{E}$ की दिशा के विपरीत प्रणोदित बल की दिशा में एक छोटे माध्य वेग जिसे **संवहन वेग** V_d कहा जाता हैं।

यदि दो क्रमवर्ती टक्करों के बीच का माध्य समय τ, जिसे **शिथिलन समय** कहा जाता है, हो तो संवहन वेग का मान

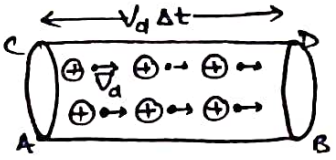
$$V_d = a\tau$$

$$\boxed{V_d = \frac{eE}{m_e} \cdot \tau}$$

• धारा घनत्व और संवहन वेग (Current Density and Drift Velocity):

$$\Delta Q = n(AV_d \Delta t)q$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = AnqV_d$$



यदि धारा, चालक के अनुप्रस्थ काट पर एकसमान हो तो धारा घनत्व का परिणाम

$$J = \frac{I}{A}$$

$$J = nqV_d$$

$$\boxed{\vec{J} = nq\vec{V_d}}$$

$$\vec{J} = -ne\vec{V_d}$$

$$\vec{J} = -ne\left(\frac{-e\vec{E}}{m_e}\tau\right) \Rightarrow \vec{J} = \frac{ne^2}{m_e}\tau\vec{E}$$

$$I = \frac{ne^2}{m_e}\tau EA$$

$$E = \frac{V}{\ell}$$

$$E = \frac{V}{l}$$

$$I = \frac{ne^2}{m_e} \tau \frac{A}{l} V$$

$$V = \frac{m_e}{ne^2\tau} \frac{l}{A} I = RI$$

$$\boxed{R = \frac{m_e}{ne^2\tau} \frac{l}{A}}$$

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

$$\boxed{\rho = \frac{m_e}{ne^2\tau}}$$

$$\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho}$$

$$\boxed{\vec{E} = \rho \vec{J}}$$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$

जहाँ $\sigma = \frac{1}{\rho}$ चालक के पदार्थ की चालकता है।

- **गतिशीलता (Mobility):**

इकांक परिणाम के विद्युत-क्षेत्र से उत्पन्न संवहन वेग को गतिशीलता (μ) कहा जाता है।

$$\boxed{\mu = \frac{V_d}{E}}$$

$$\boxed{\sigma = ne\mu_e + pe\mu_h}$$

$$V_d = \frac{e\tau E}{m_e}$$

$$\mu = \frac{V_d}{E} = \frac{e\tau}{m_e}$$

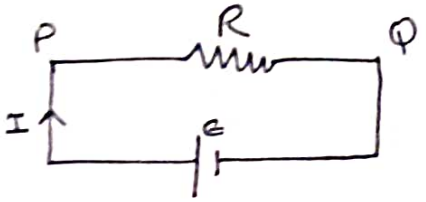
$$\mu_e = \frac{e\tau_e}{m_e}$$

$$\mu_h = \frac{e\tau_h}{m_h}$$

- **विद्युत-वाहक बल (Electromotive Force):**

किसी प्रतिरोध (या चालक) से विद्युत-धारा प्रवाहित करने के लिए उसके सिरों के बीच एक सेल जोड़ा जाता है।

प्रवाह को बनाए रखने के लिए सेल विद्युत - आवेश को पुन: निम्न विभव (Q) से उच्च विभव (P) पर ले आता है।



$$\epsilon = \frac{W}{q}$$

SI unit (मात्रक) = JC^{-1} या Volt.

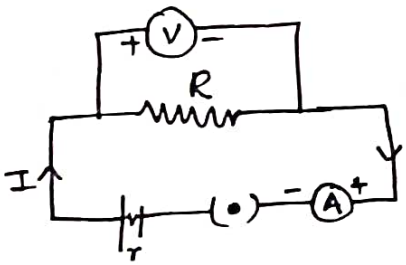
किसी सेल के विद्युत - वाहक के केंद्र के रूप में भी माना जा सकता है, विद्युत - आवेश के स्त्रोत के रूप में नहीं।

विद्युत - वाहक बल के कारण चालक के अंदर आवेश का प्रवाह धन ध्रुव से ऋण ध्रुव की ओर अर्थात विद्युत - क्षेत्र की दिशा में होता है।

* सेल में विद्युत - ऊर्जा का स्त्रोत उसमें संचित रासायनिक ऊर्जा होता है, तथा सेल को केवल ऊर्जा परिवर्तक के रूप में माना जा सकता है।

- **विद्युत - परिपथ और ओम के नियम (Electric Circuit and Ohm's Law):**

एक स्थान से दूसरे स्थान तक आवेश के प्रवाह किसी सुचालक बंद पथ में होता है, तब उस पथ को **विद्युत - परिपथ** कहा जाता है।



$$I = \frac{\text{विद्युत - वाहक बल}}{\text{कुल प्रतिरोध}} = \frac{\epsilon}{R+r}$$

$$\epsilon = I(R+r) = IR + Ir$$

$$I = \frac{\text{विभवांतर}}{\text{प्रतिरोध}} = \frac{V}{R}$$

$$V = IR$$

$$\epsilon = IR + Ir$$

$$\epsilon = V + Ir$$

सेल का ($\epsilon - V$) विद्युत - वाहक बल बाह्य प्रतिरोध से धारा प्रवाहित करने में प्रयुक्त नहीं होता है, इसलिए इसे लुप्त

वोल्ट (lost volt) कहा जाता है।

$$\text{लुप्त वोल्ट} = e - V = Ir$$

किसी सेल का विद्युत-वाहक बल सेल के ध्रुवों के बीच के विभवांतर के बराबर होता है जब परिपथ खुला हो, अर्थात जब सेल से धारा प्रवाहित नहीं हो रही हो।

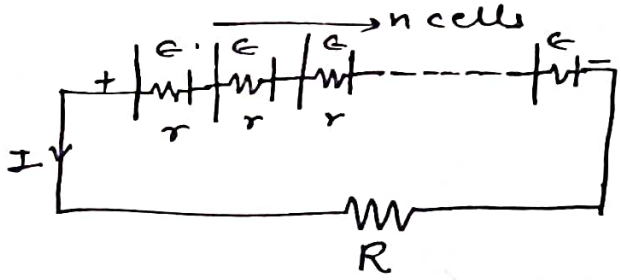
- **विद्युत-वाहक बल तथा विभवांतर में अंतर (Differences between emf and Potential Difference):**

(i) परिपथ में धारा प्रवाहित होने पर उसके किसी दो बिंदुओं के बीच विभवांतर V होता है जबकि विद्युत-वाहक बल किसी सेल के लिए होता है।

(ii) जब परिपथ खुला हो, तब उसके ध्रुवों के बीच विभवांतर का मान अधिकतम होता है जो सेल के विद्युत-वाहक बल के बराबर होता है।

जब परिपथ बंद हो, ~~अर्थ~~ अर्थात जब सेल से धारा ली जा रही हो तो ध्रुवों के बीच विभवांतर का मान पहले से घट जाता है। विभवांतर में यह कमी अर्थात लुप्त वोल्ट (Ir) धारा की प्रबलता I तथा सेल के आंतरिक प्रतिरोध r पर निर्भर होती है।

- **सेलों का समूहन (Grouping Cells):**
  - **सेलों का श्रेणीक्रम समूहन:**



$$I = \frac{\text{कुल विद्युत-वाहक बल}}{\text{कुल प्रतिरोध}}$$

$$\boxed{I = \frac{ne}{R+nr}}$$

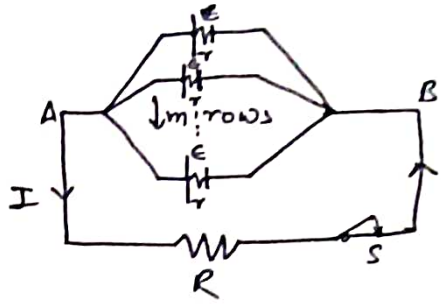
(i) यदि बाह्य प्रतिरोध R की तुलना में बैटरी का आंतरिक प्रतिरोध nr नगण्य हो, तो

$$\Rightarrow I = \frac{ne}{R} = n\left(\frac{\epsilon}{R}\right) \qquad (nr \ll\ll R)$$

(ii)

$$\Rightarrow I = \frac{ne}{nr} = \frac{\epsilon}{r} \qquad (R \ll\ll nr)$$

(i) सेलों का समांतर क्रम समूह :



$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \cdots \text{ m पदों तक } = \frac{m}{r}$$

$$R' = \frac{r}{m}$$

$$I = \frac{\epsilon}{R + \frac{r}{m}} \Rightarrow \boxed{I = \frac{m\epsilon}{mR + r}}$$

(i) $r \ll\ll R$

$$I = \frac{m\epsilon}{mR} = \frac{\epsilon}{R}$$

(ii) $R \ll\ll r$

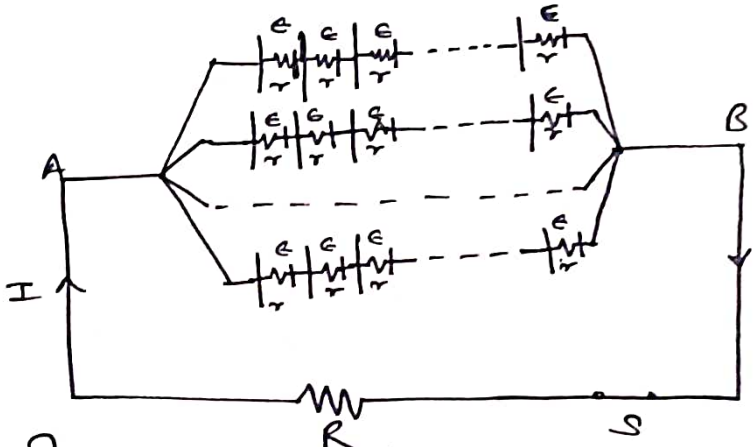
$$I = \frac{m\epsilon}{r}$$

• सेलो का मिश्रित समूहन :

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{nr} + \frac{1}{nr} + \cdots m \text{ पदों तक } = \frac{m}{nr}$$

$$R' = \frac{nr}{m}$$

$$\boxed{I = \frac{n\epsilon}{R + \frac{nr}{m}} = \frac{mn\epsilon}{mR + nr}}$$



धारा का मान अधिकतम होने की आवश्यक शर्त —

$$\boxed{R = \frac{nr}{m}} \quad \& \quad mR = nr$$

$$I_{max} = \frac{mn\epsilon}{mR + nr} = \frac{mn\epsilon}{2mR} = \frac{n\epsilon}{2R} \quad \cancel{\frac{n\epsilon}{2nr}} =$$

$$I_{max} = \frac{mn\epsilon}{2nr} = \frac{m\epsilon}{2r} \Rightarrow \boxed{I_{max} = \frac{m\epsilon}{2r} = \frac{n\epsilon}{2R}}$$

• किर्कहॉफ के नियम (Kirchhoff's Law):

(i) चालको के किसी जाल (mesh) में किसी बिंदु पर मिलनेवाली विद्युत-धाराओं का बीजीय योग शून्य होता है।

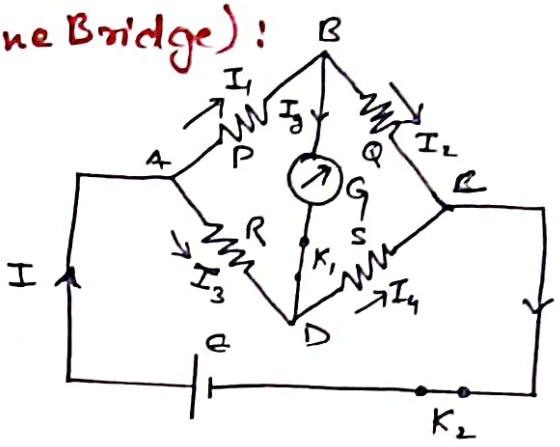
$$\boxed{\Sigma I = 0}$$

(ii) किसी बंद विद्युत-परिपथ के प्रत्येक भाग में प्रवाहित होनेवाली विद्युत-धारा तथा उसके प्रतिरोध के गुणनफल का बीजीय योग परिपथ मे लगे कुल विद्युत-वाहक बल के बराबर होता है।

$$\boxed{\Sigma \epsilon = \Sigma IR}$$

• व्हीटस्टोन ब्रिज (Wheatstone Bridge):

संतुलन अवस्था का निर्धारण:



बिंदु B पर, $I_1 = I_g + I_2$ या $I_1 = I_2$

बिंदु D पर, $I_3 + I_g = I_4$ या $I_3 = I_4$

$$\frac{I_1}{I_3} = \frac{I_2}{I_4} \quad \text{——— (1)}$$

बंद जाल ABDA के लिए —

$$I_1 P + I_g G - I_3 R = 0 \Rightarrow I_1 P = I_3 R \Rightarrow \frac{I_1}{I_3} = \frac{R}{P} \quad \text{—— (2)}$$

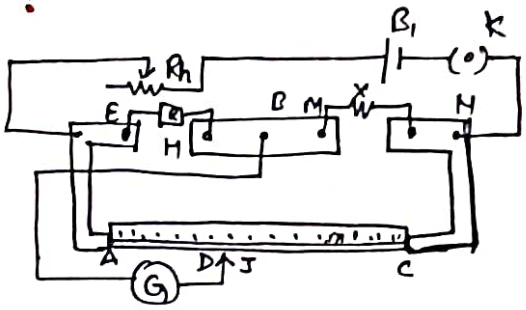
बंद जाल BCDB के लिए —

$$I_2 Q - I_4 S - I_g G = 0 \Rightarrow I_2 Q = I_4 S \Rightarrow \frac{I_2}{I_4} = \frac{S}{Q} \quad \text{—— (3)}$$

समीकरण (2) और (3) को (1) में रखने पर,

$$\frac{R}{P} = \frac{S}{Q} \Rightarrow \boxed{\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}}$$

• मीटर ब्रिज द्वारा प्रतिरोध मापन:



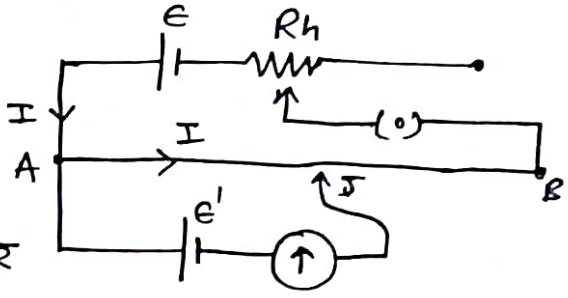
$AD = l_1$, $CD = l_2$

$P = l_1\rho$, $Q = l_2\rho$

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{X} \Rightarrow \frac{l_1\rho}{l_2\rho} = \frac{R}{X} \Rightarrow X = R\frac{l_2}{l_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{X = R\frac{(100 - l_1)}{l_1}}$$

• विभवमापी (Potentiometer):



सिद्धांत: एकसमान अनुप्रस्थ काट के द्वारा स्पष्ट होता है। काट के धातु का एक लंबा प्रतिरोध-तार AB रहता है जिसका एक सिरा A विद्युत-वाहक बल e वाले संचायक बल (सेल) के धन-ध्रुव से जोड़ा जाता है,

$$e' = I l' r$$

$e_1 = I l_1 r$ तथा $e_2 = I l_2 r$

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{I l_1 r}{I l_2 r} \Rightarrow \boxed{\frac{e_1}{e_2} = \frac{l_1}{l_2}}$$

- आंतरिक प्रतिरोध :-

$$e = (A q)\rho I = l_1 \rho I$$

$$V = \frac{e R'}{R'+r}$$

$$V = l_2 \rho I$$

$$\frac{e R'}{R'+r} = l_2 \rho I$$

$$\frac{R'+r}{R'} = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow 1 + \frac{r}{R'} = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow \frac{r}{R'} = \frac{l_1}{l_2} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \left(\frac{l_1 - l_2}{l_2}\right) R'}$$

- विद्युत-धारा का ऊष्मीय प्रभाव:

जब किसी चालक से विद्युत-धारा प्रवाहित की जाती है तब वह चालक गर्म हो जाता है, अर्थात विद्युत ऊर्जा का ऊष्मा में रूपांतरण होता है। इसे ही विद्युत-धारा का ऊष्मीय प्रभाव कहते हैं।

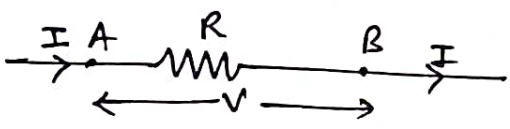
- उत्पन्न ऊष्मा का परिणाम:

$Q = It$

$W = QV$

$W = (It)V$

$$\boxed{W = VIt}$$



$V = IR \Rightarrow W = (IR)It$

$$\boxed{W = I^2 Rt}$$

$$\boxed{U = I^2 Rt}$$

• विद्युत शक्ति (Electric Power):

$$\text{विद्युत-शक्ति} = \frac{\text{विद्युत ऊर्जा}}{\text{समय}}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{I^2Rt}{t} \Rightarrow \boxed{P = I^2R}$$

$$V = IR \Rightarrow \boxed{P = VI}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{V^2}{R}}$$

$$\boxed{W = Pt = VIt = I^2Rt = \frac{V^2}{R}t}$$

$$1\,W = 1\,Js^{-1} = 1\,VA$$

• महत्तम शक्ति प्रमेय:

$$P = I^2R = \left(\frac{\epsilon}{R+r}\right)^2 R$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow \epsilon^2 \frac{d}{dR}\left(\frac{R}{(R+r)^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (R+r)^2 = 2R(R+r)$$

$$\Rightarrow \boxed{R = r}$$

• वैद्युत ऊर्जा (Electrical Energy):

$$1\,kWh = 3.6\times10^6\,Ws = 3.6\times10^6\,J$$

$$1\,\text{यूनिट} = 1\,\text{BOT यूनिट} = 1\,kWh = 3.6\times10^6\,J$$

• कार्बन प्रतिरोधक का कलर कोड:

रंग	मान	रंग	मान	रंग	सहनता
काला	0	हरा	5	Gold	5%
भूरा	1	नीला	6	Silver	10%
लाल	2	बैंगनी	7		
नारंगी	3	धूसर (grey)	8		
पीला	4	सफेद	9